O APLICAŢIE A CERCULUI LUI EULER

Prof. ***Ileana Stoica****, Liceul „Andrei Mureşanu" Braşov*

La concursul interjudeţean „*Laurenţiu Duican*" de la Braşov, ediţia 2003 a fost propusă la clasa a VII-a următoarea problemă:

În interiorul unui triunghi ABC se consideră un punct oarecare M. Notăm cu G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor BMC, AMC şi respectiv AMB. Se cere:

a). *Să se demonstreze că dreptele AG_1, BG_2, CG_3 sunt concurente într-un punct P;*

b). *Să se determine poziţia punctului M astfel încât punctul P să fie egal depărtat de mijloacele laturilor triunghiului ABC* **.**

Prof. ***Romeo Ilie,*** *Braşov*

Vom da o demonstraţie a acestei probleme folosind uneler ezultate remarcabile atribuite matematicianului elveţian Leonhard Euler (1707-)

Teorema 1 (*cercul lui Euler*)

Fie ABC un triunghi cu ortocentrul H . Dacă D, E, F sunt mijloacele laturilor $[AB],[AC]$, respectiv $[BC]$, R, S, T punctele de intersecţie ale înălţimilor din A,B,C cu laturile opuse şi X,Y,Z mijloacele segmentelor $[AH],[BH],[CH]$, atunci punctele D,E,F,R,S,T,X,Y,Z sunt conciclice.

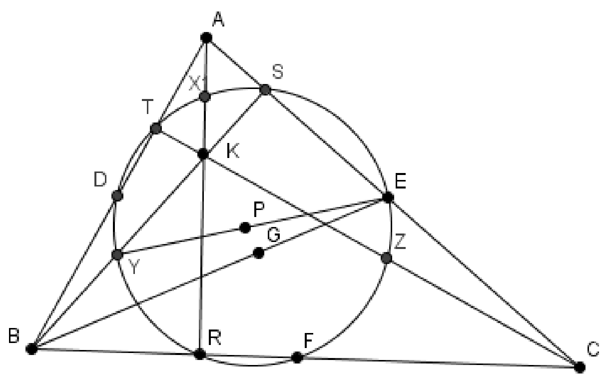
Cercul pe care sunt situate se numeşte ***cercul lui Euler*** sau ***cercul celor 9 puncte***.

Teorema 2 (*dreapta lui Euler*)

Dacă P este centrul cercului lui Euler, G centrul de greutate al triunghiului ABC, iar H ortocentrul triunghiului ABC, atunci:

a) *punctele P, G, H sunt coliniare (**dreapta lui Euler**).*

b) $HP = 3PG$.



Demonstraţia se face în mai multe etape:

Etapa I. Se arată că patrulaterele $DRFE$, $DTFE$, $FESD$ sunt inscriptibile. Cum trei puncte necoliniare determină un cerc, rezultă că punctele $D,E,F,R,$ S,T sunt conciclice.

De exemplu, să arătăm că patrulaterul $DRFE$ este inscriptibil. În $\triangle ABC$, DE este linie mijlocie, deci $DE \parallel BC$, şi astfel $DRFE$ trapez. În $\triangle ABC$, FE este linie mijlocie deci $FE = AB/2$. În $\triangle ABR$, avem că $m(\measuredangle ARB) = 90^\circ$, RD este mediană, deci $RD = AB/2$. Aşadar $RD = FE$ şi $DRFE$ este trapez isoscel, deci patrulater inscriptibil.***Etapa II***. Se arată că patrulaterele $DTXR$, $YRFS$, $ZEST$ sunt inscriptibile. Cum fiecare patrulater conține trei puncte deja situate pe un acelaşi cerc (*etapa I*) rezultă că toate cele 9 puncte sunt conciclice.

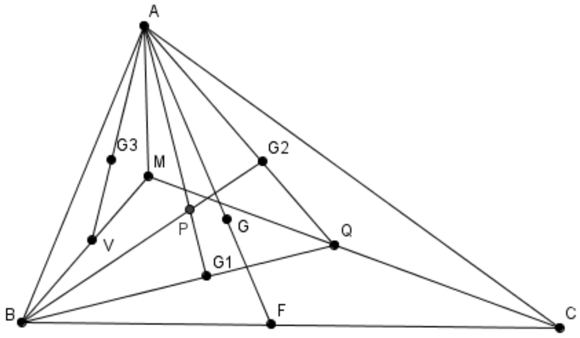
Arătăm că $DTXR$ este patrulater inscriptibil. În $\triangle ABH$, DX este linie mijlocie. Rezultă că $DX \parallel BH$ şi $m(\measuredangle ADX) = m(\measuredangle ABH)$, (1). În patrulaterul $THRB$ avem

$m(\measuredangle BTH) + m(\measuredangle HRB) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, deci $THRB$ este patrulater incriptibil şi $m(\measuredangle TRH) = m(\measuredangle TBH)$, (2). Din (1) şi (2) rezultă că $m(\measuredangle ADX) = m(\measuredangle TRX)$, deci patrulaterul $DTXR$ este inscriptibil.

Etapa III. Notăm cu N mijlocul segmentului $[BG]$, G centrul de greutate al triunghiului ABC. Se obține că $BN = NG = GE$. În cercul lui Euler, $m(\measuredangle YSE) = 90^\circ$,deci YE este diametru, iar P este mijlocul segmentului $[YE]$. În $\triangle YEN$, PG este linie mijlocie, deci $PG \parallel YN$ şi $YN = 2PG$. În $\triangle BHG$, YN este linie mijlocie , deci $YN \parallel HG$ şi $HG = 2YN$. Folosind axioma lui Euclid se obține că P, G, H sunt puncte coliniare, şi, în plus, $HG = 4PG$ şi $HP = 3PG.$

Rezolvarea problemei din concurs

a). Fie Q mijlocul segmentului MC, (*figura 2*). În $\triangle BMC$, BQ este mediană, iar G_1 centrul de greutate. Rezultă că $\frac{QG_1}{QB} = \frac{1}{3}$. În $\triangle AMC$, AQ este mediană şi avem că $\frac{QG_2}{QA} = \frac{1}{3}$ şi $\frac{QG_1}{QB} = \frac{QG_2}{QA}$. Din reciproca teoremei lui Tales se obține că $G_1G_2 \parallel AB$ şi $\frac{G_1G_2}{AB} = \frac{1}{3}$. Fie $\{P_1\} = AG_1 \cap BG_2$.



Din $G_1G_2 \parallel AB$ cu teorema fundamentală a asemănării se obține $\frac{G_1G_2}{AB} = \frac{P_1G_1}{AP_1} = \frac{P_1G_2}{BP_1}$, deci $\frac{P_1G_1}{AP_1} = \frac{1}{3}$,(3). Fie V mijlocul segmentului $[MB]$. În $\triangle ABM$, AV este mediană şi $\frac{VG_3}{AV} = \frac{1}{3}$. În $\triangle BMC$, CV este mediană. Rezultă că $\frac{VG_1}{CV} = \frac{1}{3}$ şi $\frac{VG_3}{AV} = \frac{VG_1}{CV}$, iar din reciproca teoremei lui Tales avem că $G_1G_3 \parallel AC$ şi $\frac{G_1G_3}{AC} = \frac{1}{3}$. Fie $\{P_2\} = AG_1 \cap CG_3$. Din $G_1G_3 \parallel AC$ cu teorema fundamentală a asemănării se obține $\frac{G_1G_3}{AC} = \frac{P_2G_1}{AP_2} = \frac{P_2G_3}{CP_2}$, deci $\frac{P_2G_1}{AP_2} = \frac{1}{3}$,(4).

Din (3) şi (4), P_1, $P_2 \in [AG_1]$ rezultă că P_1, P_2 coincid deci $AG_1 \cap BG_2 \cap CG_3 = \{P\}$.

b). Punctul P fiind egal depărtat de mijloacele laturilor rezultă că este centrul cercului lui Euler. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC şi F mijlocul segmentului $[BC]$. În triunghiul AA_1P avem $\frac{AG}{GF}\cdot\frac{FM}{G_1M}\cdot\frac{G_1P}{PA}=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}=1$. Din reciproca teoremei lui Menelau punctele M,G,P sunt coliniare. În triunghiul $\triangle MGF$, punctele A,P,G_1 sunt coliniare. Cu teorema lui Menelaus se obţine $\frac{AG}{AF}\cdot\frac{FG_1}{G_1M}\cdot\frac{MP}{PG}=1$ deci $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{MP}{PG}=1$ de unde

$\frac{MP}{PG}=3$ şi $MP=3PG$. Având în vedere proprietatea centrului cercului lui Euler,

$HP=3PG$, rezultă că $M=H$. Aşadar dacă M este ortocentrul triunghiului, punctul P este egal depărtat de mijloacele laturilor.

Asupra unei probleme cu ceviene izogonale

Prof. ***Silvia** şi **Ionel Brabeceanu**, Plopeni, Prahova*

Problema pusă în discuţie poate fi tratată separat folosind teorema fundamentală a asemănării, teorema bisectoarei, teorema lui Steiner, formule trigonometrice.

Definitii

1. **Ceviana** într-un triunghi este dreapta determinată de un vârf al triunghiului şi un punct de pe latura opusă.
2. **Ceviene izogonale** sunt cevienele egal înclinate faţă de laturile care pleacă din acelaşi vârf cu ele.

Teorema lui STEINER

Dacă AM şi AN sunt ceviene izogonale în triunghiul ABC atunci are loc egalitatea

$$\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BM\cdot BN}{CM\cdot CN}$$

***Demonstratie**:*

Prin vârfurile B, respectiv C ale triunghiului ABC construim paralele la laturile opuse. Se obţine astfel paralelogramul ABDC. Notăm $\{E\}=AM\cap BD$ şi $\{F\}=AN\cap CD$, (*figura 1*). Cu teorema fundamentală a asemănării găsim se obţine că $\frac{BE}{AC}=\frac{BM}{CM}$ şi $\frac{AB}{CF}=\frac{BN}{CN}$. Relaţia de demonstrat devine $\frac{BE}{CF}=\frac{AB}{AC}$, adevărată din asemănarea $\Delta ABE\sim\Delta ACF$

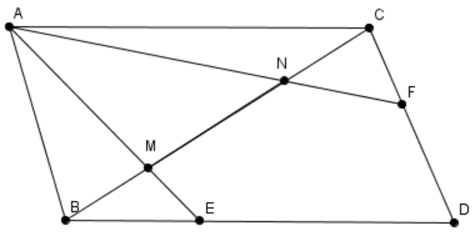


Figura 1

Problemă

În triunghiul înălţimea şi mediana din vârful A împart unghiul $\measuredangle BAC$ în trei unghiuri congruente. Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului dat.

Preliminarii

Notăm cu x măsura comună a unghiurilor $\measuredangle BAD,\measuredangle DAM,\measuredangle MAC$, unde

$AD \perp BC$ şi $BM = MC$, (*figura 2*). În condiţiile problemei triunghiul ABM este isoscel. Într-adevăr $AB = AM$, deoarece AD este înălţime şi bisectoare în triunghiul ABM.

Rezultă că $BD = DM = \frac{BC}{4}$, (*).

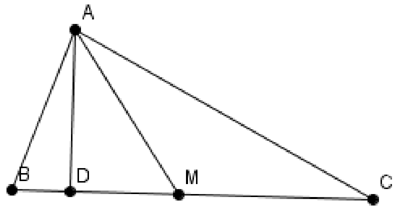


Figura 2

Soluţia 1

Întru-cât AD şi AM sunt ceviene izogonale, aplicăm teorema lui Steiner şi avem din (*), $b^2 = 3c^2$. Dar cum $m^2{}_a = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ şi $c = m_a$ obţinem $c^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$, rezultat care coroborat cu cel precedent ne dă $a^2 = 4c^2$. Prin urmare $a^2 = b^2 + c^2$ şi triunghiul este dreptunghic în A. Atunci $x = 30^\circ$ şi $m(\hat{B}) = 60^\circ$, iar $m(\hat{C}) = 30^\circ$.

Soluţia 2.

Conform teoremei bisectoarei aplicată în triunghiul ADC avem $\frac{AD}{AC} = \frac{DM}{MC} = \frac{1}{2}$, deci $AD = \frac{AC}{2}$ şi atunci în triunghiul dreptunghic ADC, $m(\angle E) = 30^\circ$, iar $m(\angle DAC) = 60^\circ$, deci $x = 30^\circ$. Prin urmare $m(\angle A) = 90^\circ$, iar $m(\angle B) = 60^\circ$.

Soluţia 3.

Presupunem ca unghiul $\angle A$ al triunghiului dat este ascuţitunghic. Deoarece AD şi AM sunt izogonale rezultă că AM trece prin centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC şi deci această dreaptă este chiar mediatoarea laturii $[BC]$, iar triunghiul ABC este isoscel. În acest caz punctele D şi M coincid, deci $x = 0$. Absurd!

Un raţionament analog exclude şi ipoteza că unghiul $\angle A$ este obtuz şi atunci conchidem că triunghiul ABC este dreptunghic în A.

Rezultă că $x = 30^\circ$ şi atunci $m(\angle B) = 60^\circ$, iar $m(\angle C) = 30^\circ$.

Soluţia 4.

Deoarece $[AM]$ este mediană, atunci $A_{ABM} = A_{ACM}$ şi astfel $AB \cdot AM \cdot \sin 2x = = AM \cdot AC \cdot \sin x$, deci $AB \cdot \sin 2x = AC \cdot \sin x$. Se obţine că $\frac{AC}{AB} = \frac{\sin 2x}{\sin x} = = \frac{2\sin x \cdot \cos x}{\sin x} = 2\cos x$. Dar în triunghiul dreptunghic ABD avem că $\cos x = \frac{AD}{AB}$ se obţine relaţia $\frac{AC}{AB} = \frac{2AD}{AB}$, deci $AD = \frac{AC}{2}$.

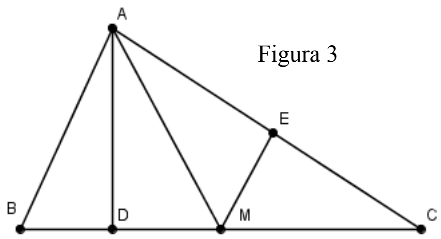


Figura 3

Din triunghiul dreptunghic ADC rezultă că $m(\angle C) = 30^0$ şi $m(\angle DAC) = 60^0$. Aşadar $x = 30^\circ$,deci $m(\angle A) = 90^\circ, m(\angle B) = 60^\circ$.

Soluția 5.

Fie $ME \perp AC$, $E \in AC$ (*figura 3*). Dar $(AM$ este bisectoarea unghiului $\angle DAC$. Se obține că $ME = MD = \ = \frac{MC}{2}$. Din triunghiul MEC dreptunghic rezultă că $m(\angle C) = 30^\circ$ și $m(\angle DAC) = 60^\circ$.

Așadar $x = 30^\circ$ de unde $m(\angle A) = 90^\circ$, $m(\angle B) = 60^\circ$.

Soluția 6.

Fie E simetricul lui A față de BC . Triunghiul ACE este isoscel cu $AC = CE$ și (CD) mediană. Cum $DM = \frac{CM}{2}$ rezultă că punctul M este centrul de greutate al triunghiului AEC și AM conține mediana și bisectoarea unghiului $\angle(CAE)$, deci $AE = AC = CE$. Rezultă că triunghiul ACE este echilateral, deci $m(\angle CAE) = 60^\circ$ și $x = 30^\circ$. Așadar $m(\hat{A}) = 90^\circ$, $m(\hat{B}) = 60^\circ$, $m(\hat{C}) = 30^\circ$

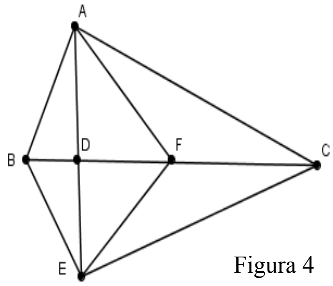


Figura 4

Pledoarie pentru studiul surselor originale (2)

Prof. **Paul Enache**,
Colegiul Național "Anastasescu", Roșiorii de Vede

Vom prezenta în continuare o parte din rezultatele lui Euler, din capitolul 5 numit "*Asupra aflării sumelor seriilor pornind de la termenul general*".

Considerăm o serie al cărei termen general, indexat după x este y , și al cărei termen precedent, cu indicele $x-1$ este v . Deoarece v se obține din y , înlocuind pe x cu $x-1$, vom avea relația: $v = y - \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{2dx^2} - \frac{d^3y}{6dx^3} + \frac{d^4y}{24dx^4} - \frac{dy^5}{129dx^5} + \ldots$ (1)

Euler exprima valoarea funcției v în $x-1$ în funcție de valoarea sa y în x și de valorile derivatelor sale, evaluate implicit tot în x . Practic, formula de mai sus este formula lui Taylor (desigur, se presupune tacit că ea poate fi aplicată, adică funcțiile sunt indefinit derivabile, iar seria Taylor converge). Să mai observăm că simbolurile x și y sunt folosite pentru a desemna valoarea unui indice natural și valoarea unei funcții evaluată aici. În zilele noastre o astfel de scriere ar produce multe confuzii. Iată de ce vom formula de aici încolo cu notațiile moderne. Astfel, relația (1) devine:

$$f(x-1) = f(x) - \frac{f'(x)}{1!} + \frac{f''(x)}{2!} - \frac{f'''(x)}{3!} + \ldots.$$

Pentru $x = k$, obținem $f(k-1) = f(k) - \frac{f'(k)}{1!} + \frac{f''(k)}{2!} - \frac{f'''(k)}{3!} + \ldots$ (2).

Să notăm $S(n)=\sum_{k=1}^{n} f(k)$, $T(n)=\sum_{k=1}^{n} f(k-1)$. Atunci $T(n)=S(n)-f(n)+f(0)$. (2').

Însumând relațiile (2) pentru valorile lui k de la 1 la n, obținem:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k-1)=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f'(k)}{1!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{f''(k)}{2!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{f'''(k)}{3!}+\ldots, (3).$$

Deci, $T(n)=S(n)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f'(k)}{1!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{f''(k)}{2!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{f'''(k)}{3!}+\ldots\ldots$

Din (2') rezultă f(n)-f(0)= $\sum_{k=1}^{n}\frac{f'(k)}{1!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{f''(k)}{2!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{f'''(k)}{3!}-\ldots\ldots$, sau echivalent

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{f'(k)}{1!}=f(n)-f(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f''(k)}{2!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{f'''(k)}{3!}+\ldots\ldots \quad (4).$$

Deci , dacă știm sumele ai căror termeni generali sunt f''(k), f'''(k),.....,putem calcula suma al cărei termen general este f'(k). În particular , metoda se poate aplica pentru funcțiile de tip putere , pentru care derivatele de la un anumit ordin se anulează.

Exemplul 1: Dacă $f(x)=x^4$. Atunci $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$, $f'''(x)=24x$, $f^{(IV)}(x)=24$.

Înlocuind în formula (4) , rezultă: $\sum_{k=1}^{n}\frac{4k^3}{1!}=n^4-0+\sum_{k=1}^{n}\frac{12k^2}{2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{24k}{6}+\sum_{k=1}^{n}\frac{24}{24}$.

Se obține $4\sum_{k=1}^{n}k^3=n^4+2n^3+n^2$.Deci, $\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exemplul 2: $f(x)=x^5$. Atunci $f'(x)=5x^4$, $f''(x)=20x^3$,$f'''(x)=60x^2$, $f^{(IV)}(x)=120x$, $f^{(V)}(x)=120$.

Formula (4) devine : $\sum_{k=1}^{n}5k^4=n^5+\sum_{k=1}^{n}\frac{20k^3}{2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{60k^2}{6}+\sum_{k=1}^{n}\frac{120k}{24}-\sum_{k=1}^{n}\frac{120}{120}$.

Rezultă $\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

Dacă în formula (4) avem f(0) = 0 și notăm f'(k) = g(k) , atunci vom avea:

$\sum_{k=1}^{n}g(k)=G(n)+\sum_{k=1}^{n}\frac{g'(k)}{2!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{g''(k)}{3!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{g'''(k)}{4!}-\ldots\ldots$ (5) , unde G este o primitivă a lui g.

Derivând relația (5) , obținem :

$$\sum_{k=1}^{n}g'(k)=g(n)+\sum_{k=1}^{n}\frac{g''(k)}{2!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{g'''(k)}{3!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{g^{(iv)}(k)}{4!}-\ldots\ldots\ldots (6).$$

Punând în relația (6) , în rolul lui g pe g' , avem :

$\sum_{k=1}^{n}g''(k)=g'(n)+\sum_{k=1}^{n}\frac{g'''(k)}{2!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{g^{(iv)}(k)}{3!}+\ldots.$ (7). Punând din nou în rolul lui g pe g' ,

obținem: $\sum_{k=1}^{n}g'''(k)=g''(n)+\sum_{k=1}^{n}\frac{g^{(iv)}(k)}{2!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{g^{(v)}(k)}{3!}+\ldots\ldots$ (8).

Înlocuind în (5) , rezultă

$$\sum_{k=1}^{n}g(k)=G(n)+\frac{1}{2!}\left(g(n)+\sum_{k=1}^{n}\frac{g''(k)}{2!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{g'''(k)}{3!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{g^{(iv)}(k)}{4!}-\ldots\ldots\ldots\right)-$$

- $\frac{1}{3!}$(g'(n)+ $\sum_{k=1}^{n}\frac{g'''(k)}{2!}$ - $\sum_{k=1}^{n}\frac{g^{(iv)}(k)}{3!}$ +..)+ $\frac{1}{4!}$(g''(n)+ $\sum_{k=1}^{n}\frac{g^{(iv)}(k)}{2!}$ - $\sum_{k=1}^{n}\frac{g^{(v)}(k)}{3!}$ +.......)-....

ş.a.m.d. (8)

Dar, pe de altă parte putem exprima:

$\sum_{k=1}^{n} g(k)$ =G(n)+ α g(n)+ β g'(n)+ γ g''(n)+ δ g''''(n)+…(*). Rezultă imediat că $\alpha=\frac{1}{2}$.

Din (8) , obţinem: $\sum_{k=1}^{n} g(k)$ =G(n)+ $\frac{1}{2}$g(n)- $\frac{1}{3!}$g'(n)+ $\frac{1}{4!}\sum_{k=1}^{n} g''(k)$ - -2 $\frac{1}{2!\cdot 3!}\sum_{k=1}^{n} g'''(k)$

+($\frac{1}{2\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 6}$) $\sum_{k=1}^{n} g^{(iv)}(k)$ +.... = G(n)+ $\frac{1}{2}$g(n)- $\frac{1}{6}$g'(n)+ $\frac{1}{4}$(g'(n)+ $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} g'''(k)$ -

$\frac{1}{3!}\sum_{k=1}^{n} g^{(iv)}(k)$ +....) + $\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} g''(k)$ - $\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} g'''(k)$ + $\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n} g^{(iv)}(k)$....

Rezultă că $\beta=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$. Continuând calculele , vom obţine γ =0, $\delta=-\frac{1}{720}$, ε =0 ,....(prin alternanţă, câte unul din termeni se anulează).

Aplicaţii.

1) Dacă g(x)=x^2 se obţine că:

$\sum_{k=1}^{n} k^2$ =G(n)+ α g(n)+ β g'(n)+ γ g''(n)= $\frac{n^3}{3}+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{12}2n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2) Dacă g(x)=x^4 se obţine că:

$\sum_{k=1}^{n} k^4$ = G(n)+ α g(n)+ β g'(n)+ γ g''(n)+ δ g'''(n)+ ε $g^{(iv)}$(n) = $\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{12}4n^3-\frac{1}{720}24n$

= $\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$.

Euler a rescris formula (*), redenumind coeficienţii , anume:

$\sum_{k=1}^{n} g(k)$ =G(n)+ $\frac{1}{2}$g(n)+ $\frac{\alpha}{3!}$g'(n)+ $\frac{\beta}{5!}$ g'''(n)+ $\frac{\gamma}{7!}$ $g^{(v)}$(n)+ $\frac{\delta}{9!}$ $g^{(7)}$(n)+ $\frac{\varepsilon}{11!}$ $g^{(9)}$(n)-.......

(ţinând cont că termenii se anulează prin altrnanţă).

Putem observa că dacă împărţim aceste numere la numerele impare , vom obţine :

$\frac{\alpha}{3}=\frac{1}{6}=B_2$, $\frac{\beta}{5}=-\frac{1}{30}=B_4$, $\frac{\gamma}{7}=\frac{1}{42}=B_6$, $\frac{\delta}{9}=-\frac{1}{30}=B_8$, $\frac{\varepsilon}{11}=\frac{5}{66}=B_{10}$.....

ş.a.m.d. unde (B_n) sunt numerele lui Bernoulli, cu notaţia modernă.

Ulterior, Euler, dar şi alţi matematicieni au descoperit o sumedenie de proprietăţi interesante ale numerelor Bernoulli, iar formula de calcul pentru sumele de puteri a putut fi rescrisă sub forma $\sum_{k=1}^{n-1} k^r=\sum_{k=0}^{r}\frac{B_k}{k!}\frac{r!}{(r-k+1)!}n^{r-k+1}$

(se spune că ştiind primii 10 termeni ai şirului (B_n) , Bernoulli a calculat în câteva minute $1^{10}+2^{10}+3^{10}+....+1000^{10}$=91409924241424243424241924242500).

Iată în continuare câteva proprietăţi ale numerelor Bernoulli:

1) Formula de calcul este: $B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \sum_{r=0}^{k} (-1)^r C_k^r r^n$. Euler a calculat numerele lui Bernoulli pâna la B_{30}. Un secol mai târziu, J.C. Adams a calculat aceste numere până la B_{124}. În 2002, canadienii Simon Plouffe şi Greg J. Fee au calculat B_{750000}, un număr cu 3.391.993 de cifre, folosind calculatorul personal, în 21 de ore. Metoda de calcul se bazează pe legătura dintre numerele Bernoulli şi funcția zeta, permițând calculul unui anumit număr din şir fără a fi nevoie să se calculeze termenii anteriori ai şirului.

2) ***D.H. Lehmer*** şi ***L. Carlitz*** au stabilit şi alte proprietăți. Astfel:

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0 \,,\quad \sum_{k=0}^{n} C_{6n+3}^{6k} B_{6k} = 2n+1 \,,\quad \sum_{k=0}^{n} C_{6n+5}^{6k+2} B_{6n+2} = \frac{1}{3}(6n+5) \,.$$

3) ***Karl von Staudt*** (1798-1867) şi ***Thomas Clausen*** (1801-1885) au descoperit independent o teoremă ce afirmă că suma dintre B_{2k} şi suma inverselor numerelor prime p cu proprietatea că p-1 divide 2k este un număr întreg, adică $-B_{2k} \equiv \sum_{(p-1)|2k} \frac{1}{p} \pmod p$

(***Teorema Clausen-von Staudt***).

De exemplu , pentru k = 6, $-B_{12} \equiv \sum_{(p-1)|12} \frac{1}{p} \equiv \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{13} \equiv \frac{3421}{2730} \pmod 1$.

O consecință imediată a acestei teoreme este că pentru orice număr prim k de forma 3n+1 avem $B_{2k} \equiv 1/6 \pmod 1$, deoarece p-1 $|2k = 2\cdot(3n+1)$ numai dacă p -1 este unul dintre numerele 1, 2, 3n+1, 6n+2, deci p este unul dintre numerele 2, 3, 3n+2, 6n+3. Dar 6n+3 este divizibil cu 3, iar 3n+2 este par deoarece 3n+1 este prim. Deci singurele numere prime candidate sunt 2 şi 3. Primele numere prime de forma 3n+1 sunt 7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 97, ..., deci avem egalitățile:

$B_{14} \equiv B_{26} \equiv B_{38} \equiv B_{62} \equiv B_{74} \equiv B_{86} \equiv B_{122} \equiv B_{134} \equiv B_{146} \equiv B_{158} \equiv B_{194} \equiv \ldots\ldots \equiv 1/6 \pmod 1$.

Teorema lui Staudt este foarte importantă pentru că permite calcularea exactă a acelor numere ale lui Bernoulli pentru care se cunoaşte o aproximare suficient de bună. În afară de teoria seriilor, numerele Bernoulli au multe aplicații în topologia diferențială, analiza matematică şi teoria numerelor. Sunt legate chiar de Marea Teoremă a lui Fermat, care afirmă că pentru $n \geq 3$, întreg, ecuația $x^n + y^n = z^n$ nu are soluții numere întregi, nenule. Încă de când Fermat a formulat-o, pe la 1630, generații de matematicieni au încercat să demonstreze acest enunț. Primul rezultat remarcabil l-a obținut Ernst Kummer (1810-1893) care a demonstrat că teorema este adevărată pentru numerele prime regulate, obținând un criteriu de regularitate foarte frumos: *un număr prim p este regulat* $\Leftrightarrow$ *p nu divide numărătorii numerelor* $B_2, B_4, \ldots, B_{p-3}$.

El a arătat că toate numerele prime mai mici decât 37 sunt regulate, deci Marea Teoremă a lui Fermat este adevărată pentru aceste numere. Numărul 37 este primul număr prim neregulat, deoarece $B_{32} = \frac{7709321041217}{510} = \frac{37\cdot 208360028141}{510}$.

Bibliografie

1) Carlitz, L. Bernoulli Numbers , Fib.Quart, vol.6 71-85 (1968)
2) Cong Lin , On Bernoulli Numbers and Its Proprieties
3) Euler , Leonhard , Institutiones Calculi Differentialis , St. Petersburg , 1755 , retip. Opera Omnia Seria I , vol.10
4)Pengelley D. , The bridge betwwen the continuos and discrete via original sources , The Abel-Fauvel Conference 2002.
5)Pengelley D. , Dances between continuos and discrete :Euler's summation formula
6) Weil A. , Number theory :An approach through history , Birkhauser , Boston ,1983