

Pledoarie pentru studiul surselor originale

*Prof. Paul Enache,
Colegiul Național "Anastasescu", Roșiorii de Vede*

Lipsa de motivație pentru învățarea conceptelor abstracte este, fără îndoială, o trăsătură aproape unanim recunoscută în școala românească. Încercările noastre de a spori efectul unei prezen-tări a unui concept abstract prin folosirea unor aplicații practice este adesea sortit eșecului. Și aceasta pentru că mulți elevi văd matematica doar ca pe un joc cu reguli arbitrare, fără legături cu realitatea imediată și chiar cu nimic altceva. Lucrurile nu devin mai interesante pentru ei nici măcar dacă îi convingem că acele noțiuni și concepte sunt utile undeva. Matematica rămâne doar cu imaginea de "limbaj al științei", dar acest lucru nu o face mai atractivă. Iată de ce ar trebui să punem mai mult accent pe aspectele creative, artistice chiar, în încercarea de a crea o fascinație intelectuală. Din păcate, modul în care sunt concepute subiectele la examenele importante din viața elevilor ce constituie majoritatea populației școlare din țara noastră îi împiedică adesea și pe profesori să își pună astfel de probleme. Un alt dezavantaj în predarea matematicii este că înlătură posibilitatea pentru elevi de a vedea matematica drept un proces în curs de desfășurare.

Căci, pe de o parte metodele tradiționale de predare nu fac referiri la modul în care matematicienii gândesc și lucrează la rezolvarea unei probleme, iar pe de altă parte nu este pus în evidență modul în care se dezvoltă o teorie matematică, din încercările întinse adesea pe mai multe secole, de a rezolva o anumită problemă. Iată de ce, chiar și unor tineri cu oarece afinități pentru matematică le vine greu să creadă că aceasta este un organism viu, că și astăzi se face multă cercetare matematică. Și asta pentru că ei nu văd decât o structură pietrificată, căci ce altceva le-ar putea sugera listele cu formule pe care le prezentăm elevilor? Ele nu au nicio urmă din procesul de creație umană, realizat cu cel puțin un secol în urmă.

Matematicienii știu însă că în lucrările predecesorilor pot fi încă găsite multe surse de inspirație pentru cercetări actuale. Sunt încă multe de valorificat din lucrările lui Gauss, Weierstrass sau Hilbert și chiar mai în urmă, la Euler. Pentru un scriitor, pictor, poet sau filosof o astfel de observație nu ar fi nouă, căci în domeniile lor importanța studiului lucrărilor originale, a tehnicilor și metodelor măștrilor o fost de mult recunoscută. Astfel, ei pot înțelege frământările și efortul ce a stat în spatele procesului creativ. Tinerii artiști devin conștienți că și ei sunt parte a tradiției de creație. Din păcate, în matematică simțul tradiției s-a cam pierdut și, paradoxal, pentru acest lucru este adesea invocată chiar dezvoltarea explozivă a matematicii din ultimul secol. Se pune atunci întrebarea: pentru a îmbunătăți situația, oare este suficient ca tinerii să studieze istoria matematicii? Dar în felul acesta nu am face altceva decât să marginalizăm subiectele importante, căci am vorbi despre matematică, dar fără să facem de fapt matematică. Iar cărțile de istorie a matematicii insistă pe perioada pre-renascentistă și acordă foarte puțină atenție matematicii din secolele XIX și XX sau matematicii din era babiloneană, care este foarte relevantă pentru multe lucruri pe care elevii le studiază astăzi.

Chiar dacă se adaugă unele referințe biografice sau comentarii în manualele de matematică (ceea ce se întâmplă în ultimii ani) și se dezvoltă puțin latura umană a subiectului, totuși din punct de vedere al matematicii rezultatele sunt aproape nule. Iată de ce pledoaria aceasta nu este pentru studiul istoriei matematicii, ci al matematicii "istorice".

Și aceasta deoarece studiul operelor originale este esențial pentru a înțelege care sunt rădăcinile unui anumit subiect, cum evoluează și care sunt perspectivele. Căci Abel afirma: ” *Cred că pentru a progresa în matematică trebuie să studiem maestrul și nu pe elevii lui* “.

Evident că orice idee matematică se construiește pe o succesiune de idei care au precedat-o. Folosind sursele originale, tinerii au posibilitatea să descopere rădăcinile problemelor moderne, ideile și conceptele, uneori chiar întregul subiect. Ei văd obstacolele pe care vechii matematicieni le aveau în trecut pentru a putea avansa în rezolvarea unei probleme, înțelegând cum trebuie abordată o problemă nouă. În felul acesta, tinerii ajung cât de aproape este posibil de experiența creației în matematică, fără intermediari. Ei pot vedea și simți tenacitatea, starturile false și triumfurile adevăraților matematicieni, salturile semnificative ce au revoluționat diferitele domenii ale matematicii.

Un al doilea motiv, mai subtil dar poate derivând din primul este că citind sursele originale ei sunt inițiați în modul în care matematica trebuie practică: prin cercetare, discuții și publicații. Matematicienii de vârf dintr-un domeniu citesc mai mult articole rezultate din cercetare decât monografiile. Și tinerii pot face acest lucru acum, la nivelul lor de pregătire matematică. În felul acesta ei pot trăi bucuria de a descoperi singuri anumite lucruri și de a intra în rezonanță cu procesul complex al cercetării științifice. Ar putea fi o cale de a sparge sau măcar de a fisura carapacea în care se ascunde învățământul nostru de o bună perioadă de timp.

Iată acum și un exemplu despre cum munca și rezultatele obținute de mari matematicieni din secolele trecute pot fi prezentate tinerilor de astăzi, eventual adaptând notațiile .

În 1670, James Gregory (1638-1675) și Gottfried Leibniz (1646-1716) au descoperit că $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$, ceea ce în esență știau și matematicienii din Kerala (sudul Indiei) cu 2 secole mai înainte. Deoarece, cu excepția seriilor geometrice, la acea vreme se cunoștea suma doar pentru un număr foarte mic de serii infinite, acest rezultat remarcabil i-a îndemnat pe Leibniz și pe frații Jakob și Johann Bernoulli să caute sumele și pentru alte serii, în particular pentru inversele pătratelor $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots =$, o problemă ridicată de Pietro Mengoli (1626-1686) în 1650 (problema “Basel”). Euler a demonstrat că suma este egală cu $\frac{\pi^2}{6}$, utilizând ceea ce se cheamă “*formula de sumare*”. Această nouă abordare a

cuprins atât problema Basel, cât și formulele pentru sumele de puteri $\sum_{i=1}^n i^k$, unde k este un număr natural, sume ce erau studiate încă din antichitate în legătură cu calculul ariilor și volumelor. Formula de sumare l-a ajutat pe Euler să rezolve ambele chestiuni. Este o ilustrare foarte frumoasă a modului în care generalizarea și abstractizarea pot conduce la rezolvarea unor probleme ce păreau complet independente.

Sumele de puteri și formula de sumare a lui L. EULER

Povestea noastră începe în vremurile antice cu încercările grecilor de a calcula arii și volume, printr-o metodă exhaustivă. Pitagoreenii știau în secolul VI Î.C. că $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, iar Arhimede a demonstrat ceva echivalent cu formula modernă

$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pe care a folosit-o pentru a calcula aria din

interiorul unei spirale. Însurarea unor puteri mai mari era cheia calculării unor alte arii și volume și găsim formula pentru suma cuburilor la Nicomanus din Gerasa (sec. I Î.C.) și Aryabhata în India (499 D.C.) și Al-Karaji în lumea arabă (pe la anul 1000).

Prima încercare de a găsi o relație generală între sumele cu diverși exponenți este în lucrările lui Abu Ali al-Hassan ibn al-Haztham (965-1039), care avea nevoie de suma puterilor de ordinul 4 pentru a calcula volumul unui paraboloid de rotație. Pe la jumătatea secolului al XVII-lea Pierre de Fermat (1601-1665) și Blaise Pascal (1623-1662) au realizat legăturile între coeficienții binomiali (numere figurate) și sumele de puteri, din dorința de a calcula “*ariile parabolilor superioare*” (adică $y=x^k$).

Pierre de Fermat numea încercarea de a calcula sumele de puteri ca fiind „*poate cea mai frumoasă problemă a aritmeticii*” și încerca să obțină o soluție recursivă cu ajutorul numerelor figurate. Pascal a folosit dezvoltările binomiale și sumele telescopice pentru a obține prima formulă recursivă între sumele de puteri cu diverși exponenți.

Jakob Bernouli, lucrând la nou născuta teorie a probabilităților, a fost primul care a introdus printr-o conjectură, un model general de abordare a sumelor de puteri, cu ajutorul “*numerelor Bernoulli*”. În cartea sa postumă din 1713 “*Arta de a crea conjecturi*” el a dat prima listă a formulelor sumelor de puteri până la exponentul 10 (folosind notația \int pentru

suma discretă de la 1 la 10) (de exemplu, $\int n = \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n$) și a surprins un model :

$$\int n^c = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c^2-1 \cdot c-2}{2 \cdot 3 \cdot 4}Bn^{c-3} + \frac{c^2-1 \cdot c-2 \cdot c-3 \cdot c-4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}Cn^{c-5} + \frac{c^2-1 \cdot c-2 \cdot c-3 \cdot c-4 \cdot c-5 \cdot c-6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}Dn^{c-7} + \dots, \text{unde puterile lui } n \text{ scad din } 2 \text{ în } 2 \text{ până ce}$$

ajung la n sau n^2 , iar A, B, C, D... sunt ultimii coeficienții ce apar în calculul pentru $\int n^2$,

$\int n^4, \int n^6, \int n^8 \dots$, adică $A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{30}, C = \frac{1}{42}, D = -\frac{1}{30} \dots$, iar suma coeficienților într-o

formulă este 1. Euler va denumi aceste numere, *numerele lui Bernoulli*.

În jurul anului 1730, Leonhard Euler, pe atunci în vârstă de 23 de ani, împreună cu Christian Goldbach (1690-1764) și Daniel Bernoulli (1700-1782) au dezvoltat moduri de a estima din ce în ce mai bine suma inverselor pătratelor. Însă seria converge foarte încet. Ei încercau să ghicească valoarea exactă a sumei, sperând să recunoască o expresie familiară (ceva în legătură cu π). Cu ajutorul formulei de sumare despre care vom discuta în continuare, Euler a calculat 20 de zecimale ale sumei, într-un articol trimis Academiei de Științe din Sankt Petersburg în 1735. Peste doar 7 săptămâni, Euler si-a uimit din nou contemporanii, rezolvând complet problema Basel, demonstrând printr-o metodă complet

diferită că suma seriei este $\frac{\pi^2}{6}$. Cea mai mare parte a lucrării “*Institutiones Calculi*

Differentialis” scrisă două decenii mai târziu se referă la relația dintre calculul diferențial și seriile infinite, unificând multe din descoperirile sale. El a dedicat capitolele 5 și 6 formulei de sumare și multiplelor sale aplicații.

Bibliografie

- 1) Carlitz, L. Bernoulli Numbers , Fib.Quart, vol.6 71-85 (1968)
- 2) Cong Lin , On Bernoulli Numbers and Its Proprieties

- 3) Euler , Leonhard , Institutiones Calculi Differentialis , St. Petersburg , 1755 , retip. Opera Omnia Seria I , vol.10
 4) Pengelley D. , The bridge between the continuous and discrete via original sources , The Abel-Fauvel Conference 2002.
 5) Pengelley D. , Dances between continuous and discrete : Euler's summation formula
 6) Weil A. , Number theory : An approach through history , Birkhauser , Boston , 1983

Despre valoarea numărului π

Prof. Udma Arleziana Emilia
Colegiul Tehnic „Anghel Saligny”, Roșiorii de Vede

Este surprinzător, dar mulți elevi de liceu, dacă ar fi întrebați care este mai mare, 3,14 sau $22/7$ ar spune că cele două numere sunt egale. Și asta fiindcă ei cred că ambele îl reprezintă pe π . În realitate, însă, nici unul din ele nu este π . Numărul 3,14 este mai mic decât π , în timp ce $22/7$, fiind egal cu 3,1428571..., este mai mare.

Există unele dovezi că vechii evrei și babilonieni au fost mai puțin exacti decât elevii de liceu de astăzi. Din Biblie aflăm că macheta unui bazin făcut de Hiram din Tyre pentru regele Solomon „era rotundă având zece coți de la o margine la alta ... și o linie de treizeci de coți îi măsura circumferința”. Implicit, π era egal cu 3, din moment ce π este raportul dintre circumferința și diametrul cercului. În comparație cu evreii, matematicienii babilonieni utilizau o valoare ceva mai bună, considerându-l pe π egal cu 3,125. În schimb, grecilor și chinezilor antici le-a fost clar că îl pot determina pe π , cu suficientă precizie, comparând cercul cu un poligon al cărui număr de laturi să fie ales astfel încât respectivul poligon să aproximeze cât mai bine forma circulară. Valoarea perimetrului unui poligon regulat se putea determina relativ ușor dacă știai distanța dintre centrul său și una dintre laturi sau unul dintre vârfuri. Utilizând această metodă, Arhimede l-a calculat pe π , găsindu-i o valoare cuprinsă între $3-10/71$ și $3-10/70$ ($22/7$), în timp ce, prin 500 d. Hr., învățații chinezi au arătat că π se află undeva între numerele 3,1415926 și 3,14152927. În 1596, Ludolph din Koln a utilizat aceeași metodă pentru a-i da lui π o valoare cu 32 de zecimale. Rezultatul obținut este gravat pe mormântul său, iar nemții îl numesc pe π , chiar și în ziua de astăzi, număr ludolphin.

Toată lumea știa că nici una dintre aceste valori ale lui π nu este exactă (din moment ce ele se bazează pe perimetrele unor poligoane și nu pe circumferința cercului), dar nu era clar dacă se va putea obține vreodată o valoare corectă. Cam în perioada în care a trăit Ludolph, Viete a conceput prima expresie numerică simplă pentru descrierea lui π . Acesta nu a mai fost exprimat sub forma unui număr zecimal sau a unei fracții, ci ca un produs infinit. Matematicienii de mai târziu au găsit alte produse infinite și serii (sume) infinite pentru π . Două dintre cele mai simple sunt de fapt egale cu $\pi/2$, respectiv $\pi/4$. În secolul XVII, John Wallis a descoperit că produsul $\pi/2=2/1 \times 2/3 \times 4/3 \times 4/5 \times 6/5 \times 6/7 \times \dots$, unde numărătorii sunt numere pare și numitorii numere impare, fiecare număr apărând de câte două ori, fie că se află la numărător, fie că se află la numitor. James Gregory și Wilhem Gottfried Leibnitz au descoperit, pentru $\pi/4$, o sumă infinită care este și mai simplă: $\pi/4=1/1-1/3+1/5-1/7+1/9-1/11+\dots$. Aceasta este cunoscută sub numele de seria Leibnitz, deși Gregory este cel care a descoperit-o primul. Aceste expresii infinite dau valori acceptabile pentru π , dar nu spun dacă el poate fi exprimat sub forma unui număr zecimal finit. Or, multe produse sau serii infinite converg către o limită zecimală finită.

În orice caz aceste produse și serii infinite asigură un calcul mai facil al aproximărilor lui π decât metoda poligoanelor. La sfârșitul secolului XVII, Abraham Sharp a ajuns la o valoare compusă din 71 zecimale. În secolul XIX, π a fost extins treptat, ajungând în 1853, după calculele făcute de William Shanks timp de 15 ani, la 707 zecimale.

Din păcate însă, după inventarea calculatoarelor, s-a constatat că Shanks greșise cea de-a 528-a zecimală, toate celelalte fiind, evident, eronate.

Revenind, în secolul XVIII, Johann Lambert a reușit să soluționeze în sfârșit una dintre problemele legate de π . El a arătat că π este irațional sau, cu alte cuvinte, că nici nu poate fi exprimat sub forma unui număr zecimal finit, nici nu are vreun grup de zecimale care să se repete (nu poate fi scris sub formă de fracție zecimală periodică).

Mai există însă o problemă înrudită care rămăsese nesoluționată. Cel puțin din secolul V î. Hr., de pe vremea lui Anaxagora, oamenii încercaseră să construiască un pătrat care să aibă aceeași suprafață cu un cerc dat, folosindu-se doar de riglă și compas. Prin 1775, numărul celor care mai încercau să soluționeze faimoasa problemă era atât de mare încât Academia din Paris a luat hotărârea de a nu mai examina nici o lucrare pe această temă.

Problema găsirii cuadraturii cercului a fost cu adevărat soluționată abia în 1882 când matematicianul Ferdinand Lindemann a arătat că π face parte dintr-o clasă de numere dintre a cărei membri nu sunt cunoscuți decât câțiva. Aceste numere se numesc transcendente. Ele sunt mai numeroase decât oricare altele, mult mai familiare. Caracteristica lui definitorie este că nu pot fi rădăcini ale ecuațiilor algebrice cu coeficienți întregi. Posibilitatea construirii unei linii cu rigla și compasul implică faptul că lungimea respectivei linii este rădăcina unei astfel de ecuații. Din moment ce π este transcendent, el nu poate fi o astfel de rădăcină. Ca atare, găsierea cuadraturii cercului este imposibilă.

Concluzia expusă mai sus nu i-a oprit însă pe oameni să calculeze în continuare valoarea lui π cu din ce în ce mai multe zecimale. În anii 1940-1950, când calculatoarele electronice au fost accesibile, unii dintre ei au utilizat metoda de calcul al lui π pentru a demonstra virtuțile noilor instrumente. Prin 1949, în 70 de ore timp-computer (a se compara cu cei 15 ani de timp-gândire umană ce i-au fost necesari lui Shanks), numărul de zecimale ale lui π a fost extins la 2037. În 1988, japonezul Yasumasa Kanada, specialist în computere, ajungea la 201326000 de zecimale și plănuia să meargă mai departe. Calculul efectuat de el în 1988 a necesitat numai 6 ore timp-computer.

BIBLIOGRAFIE:

Alexander Hellems, Bryan Bunch, *Istoria descoperirilor științifice*
Ed. Orizonturi/ Ed. Lider – București 1988.

IDENTITĂȚI. IDENTITATEA LUI HERMITE. CONSECINȚE

Prof. Nițu Ștefan

Liceul teoretic "AL.I.CUZA" Alexandria

Un rol important în rezolvarea exercițiilor cu parte întreagă îl are identitatea lui

$$\text{Hermite: } [x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \left[x + \frac{2}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx], (*)$$

adevărată pentru $(\forall)x \in \mathbf{R}$, și $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$.

Înainte de a demonstra identitatea (*), vom demonstra câteva identități particulare (pentru $n = 2$ și $n = 3$), identități care se regăsesc și în manualele de liceu. Într-adevăr, dacă facem $n = 2$, respectiv $n = 3$, în identitatea (*), se obțin alte două identități importante:

$$1)^M \text{ Să se arate că: } (\forall)x \in \mathbf{R} \Rightarrow [x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x], (\alpha).$$

2)^M Să se arate că: $(\forall)x \in \mathbf{R} \Rightarrow [x] + [x + \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}] = [3x]$, (β).

Demonstrație. 1) Notăm $x = m+t$, $m \in \mathbf{Z}$, $t \in [0,1)$. Relația (α) devine $[m+t] + [m+t + \frac{1}{2}] =$

$[2m+2t]$ și folosind proprietatea $[k+y] = k+[y]$, $(\forall)k \in \mathbf{Z}$, $y \in \mathbf{R}$ obținem $m+[t] + m+[t + \frac{1}{2}] =$

$2m+[2t] \Leftrightarrow [t] + [t + \frac{1}{2}] = [2t]$, relație adevărată pentru $t \in [0,1)$, căci $\begin{cases} t + \frac{1}{2} \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \\ 2t \in [0,2) = [0,1) \cup [1,2) \end{cases}$

$\Rightarrow t \in [0, \frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2}, 1)$ și discutăm după valorile lui t . Dacă $t \in [0, \frac{1}{2})$ rezultă că $[t]=0$, $[t + \frac{1}{2}]=0$

și $[2t]=0$ deci relația este adevărată. Dacă $t \in [\frac{1}{2}, 1) \Rightarrow [t] = 0$, $[t + \frac{1}{2}] = 1$ și $[2t] = 1$ deci relație adevărată.

2) Notăm $x = m+t$, $m \in \mathbf{Z}$, $t \in [0,1)$ și analog ca la exercițiul 1), obținem relația echivalentă

$[t] + [t + \frac{1}{3}] + [t + \frac{2}{3}] = [3t]$, relație adevărată. Pentru $t \in [0,1) \Leftrightarrow 3t \in [0,3)$. Fie deci

$t \in [0,1) = [0, \frac{1}{3}) \cup [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup [\frac{2}{3}, 1)$. Discutând după valorile lui t , avem:

Caz 1). $t \in [0, \frac{1}{3}) \Rightarrow t + \frac{1}{3} \in [0, \frac{2}{3})$, $t + \frac{2}{3} \in [0,1)$ și $3t \in [0,1)$, iar dacă înlocuim $\Rightarrow 0+0+0 = 0$, relație adevărată.

Caz 2). $t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \Rightarrow t + \frac{1}{3} \in [\frac{2}{3}, 1)$, $t + \frac{2}{3} \in [1, \frac{4}{3})$ și $3t \in [1,2)$ iar dacă înlocuim $\Rightarrow 0+0+1=1$ relație adevărată.

Caz 3) $t \in [\frac{2}{3}, 1) \Rightarrow t + \frac{1}{3} \in [1, \frac{4}{3})$, $t + \frac{2}{3} \in [\frac{4}{3}, 1)$ și $3t \in [2,3)$, iar dacă înlocuim $\Rightarrow 0+1+1 = 2$ relație adevărată.

Observație importantă. Este indicat să se observe mai întâi dacă este verificată identitatea **Hermite** (eventual un caz particular), pentru a simplifica efectuarea calculelor.

Să demonstrăm acum identitatea Hermite pe caz general:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \left[x + \frac{2}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx], (\forall) x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}^*.$$

Metoda 1. Fie $x = [x] + \alpha$, $\alpha \in [0,1) \Rightarrow \alpha \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$, $(\forall)k \in \{0,1,\dots,n-1\} \Rightarrow [x + \frac{1}{n}] = [x]$,

$(\forall)l \in \{0,1,\dots,n-k-1\}; [x + \frac{l}{n}] = [x]+1$, $(\forall)l \in \{n-k, n-k+1, \dots, n-1\}$; însumăm, obținem

$$\sum_{l=0}^{n-1} [x + \frac{l}{n}] = \left(\underbrace{[x] + \dots + [x]}_{"n-k'ori"} \right) + \left(\underbrace{([x]+1) + \dots + ([x]+1)}_{"k'ori"} \right) = n[x] + k. \text{ Apoi } [nx] = [n([x] + \alpha)] =$$

$$[n[x] + n\alpha] = n[x] + [n\alpha] = n[x] + k \text{ căci, din } \alpha \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right) \Rightarrow n\alpha \in [k, k+1) \text{ deci } [n\alpha] = k$$

Metoda a 2-a. Scriem numărul $x \in \mathbf{R}$ astfel: $x = [x] + \alpha$ cu $\alpha \in [0, 1)$. Dar $\alpha \in [0, 1)$ implică faptul că α este situat între două numere consecutive dintre următoarele:

$\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$. Fie $\frac{k}{n}$ și $\frac{k+1}{n}$ ($0 \leq k \leq n-1, k \in \mathbf{N}$) aceste numere $\Rightarrow \frac{k}{n} \leq \alpha < \frac{k+1}{n}$. Avem și $x + \frac{n-k-1}{n} = [x] + \alpha + \frac{n-k-1}{n} < [x] + \frac{k+1}{n} + \frac{n-k-1}{n} = [x] + 1$ și $x + \frac{n-k}{n} = [x] + \alpha + \frac{n-k}{n} \geq [x] + \frac{k}{n} + \frac{n-k}{n} = [x] + 1$ iar $x + \frac{n-1}{n} = [x] + \alpha + \frac{n-1}{n} < [x] + \frac{k+1}{n} + \frac{n-1}{n} = [x] + \frac{n+k}{n} < [x] + 2$. Atunci $[x] \leq [x + \frac{1}{n}] \leq \dots \leq [x + \frac{n-k-1}{n}] < [x] + 1$ și $[x] + 1 \leq [x + \frac{n-k}{n}] \leq \dots \leq [x + \frac{n-1}{n}] < [x] + 2 \Rightarrow [x] = [x + \frac{1}{n}] = \dots = [x + \frac{n-k-1}{n}]$ și $[x + \frac{n-k}{n}] = \dots = [x + \frac{n-1}{n}] = [x] + 1$. Atunci $[x] + [x + \frac{1}{n}] + \dots + [x + \frac{n-1}{n}] = k[x] + k([x] + 1) = n[x] + k = [nx]$ deoarece $\frac{k}{n} \leq \alpha < \frac{k+1}{n}$ implică $k \leq n\alpha < k+1$ deci putem scrie $n\alpha = k + \alpha'$ cu $0 \leq \alpha' < 1$. Deci $[nx] = [n[x] + n\alpha] = [n[x] + k + \alpha'] = n[x] + k$; proprietatea **Hermite** este demonstrată, deci $S = [nx]$.

Metoda a 3-a. Fie $n \in \mathbf{N}^*$ fixat și $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}, f(x) = [x + \frac{1}{n}] + \dots + [x + \frac{n-1}{n}] - [nx]$. Atunci

$$f(x + \frac{1}{n}) = [x + \frac{1}{n}] + [x + \frac{2}{n}] + [x + \frac{3}{n}] + \dots + [x + \frac{n}{n}] - [nx + 1] = [x + \frac{1}{n}] + [x + \frac{2}{n}] + \dots + [x + \frac{n-1}{n}] + [x] - [nx] - 1 = f(x), \forall x \in \mathbf{R}, \text{ deci } f \text{ este periodică, de perioadă}$$

$T = \frac{1}{n}$. Studiem mulțimea valorilor ($\text{Im}f$) pe $[0, \frac{1}{n})$. Pentru $x \in [0, \frac{1}{n}) \Rightarrow$

$$[x] = 0, [x + \frac{1}{n}] = 0, [x + \frac{2}{n}] = 0, \dots, [x + \frac{n-1}{n}] = 0, [nx] = 0$$

Adunând aceste egalități se obține $f(x) = 0, (\forall)x \in \mathbf{R}$ deci

$$[x] + [x + \frac{1}{n}] + [x + \frac{2}{n}] + \dots + [x + \frac{n-1}{n}] = [nx], (\forall)x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}^*.$$

Metoda a 4-a. Discutăm membrul stâng al egalității. Dacă $x \in [0, \frac{1}{n}]$, atunci toate numerele

$x, x + \frac{1}{n}, \dots, x + \frac{n-1}{n}$ sunt mai mici ca 1, și partea întreagă din fiecare este 0; $[nx] = 0$.

Deci, în acest caz identitatea **Hermite** este demonstrată. Fie acum x arbitrar. Dacă se mărește x cu $\frac{1}{n}$, atunci toți termenii din partea stângă se deplasează cu un loc spre dreapta,

iar ultimul termen $[x + \frac{n-1}{n}]$ devine $[x+1]$. Deci, prin mărirea lui x cu $\frac{1}{n}$, partea stângă se mărește cu 1, iar partea dreaptă se mărește de asemenea cu 1. Pentru orice număr x există

$\alpha \in [0, \frac{1}{n})$, astfel încât x să difere de α prin $\frac{m}{n}$, unde $m \in \mathbf{Z}$. De aici rezultă că identitatea se păstrează pentru orice x .

Vom prezenta în continuare două probleme, relativ asemănătoare:

1) Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{2x-1}{3} \right] + \left[\frac{4x+1}{6} \right] = 5x - 4$

a) $x = 0$; b) $x \leq 0$; c) $x = 4$; d) $x = 5$; e) $x = \frac{4}{5}$

Soluție Verificăm, mai întâi, dacă putem aplica o identitate HERMITE de tipul (α) .

Dacă notăm $\frac{2x-1}{3} = y$, observăm că $\frac{2x-1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4x+1}{6}$ deci ecuația devine $[y] + \left[y + \frac{1}{2} \right] = 5x - 4$.

În membrul stâng, putem folosi identitatea HERMITE: $[y] + \left[y + \frac{1}{2} \right] = [2y]$ și înlocuind

$x = \frac{3y+1}{2}$, ecuația este echivalentă cu $[2y] = \frac{15y-3}{2}$ (1). Folosim definiția: $[2y] \leq 2y < [2y]$

+ 1, $(\forall) y \in \mathbf{R}$, obținem $\frac{15y-3}{2} \leq 2y < \frac{15y-3}{2} + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{11} < y \leq \frac{3}{11}$ (2). Dacă notăm $[2y] = k \in \mathbf{Z}$

$\Rightarrow \frac{15y-3}{2} = k \Rightarrow y = \frac{2k+3}{15}$ care, înlocuit în relația (2), implică $-\frac{9}{11} < k \leq \frac{6}{11}$ și deoarece

$k \in \mathbf{Z} \Rightarrow k = 0$. Atunci $y = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{4}{5}$. Răspuns e)

2) Aflați $x \in \mathbf{R}$ astfel încât $\left[\frac{2x-2}{3} \right] - \left[\frac{x-1}{6} \right] = 2002$

(Concurs matematica Sf. GHEORGHE – 2002)

Soluție: Ecuația nu este de tip HERMITE. Notăm $\begin{cases} \left[\frac{2x-2}{3} \right] = k, k \in \mathbf{Z} \\ \left[\frac{x-1}{6} \right] = l, l \in \mathbf{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \leq \frac{2x-2}{3} < k+1 \\ l \leq \frac{x-1}{6} < l+1 \\ k-l = 2002 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k \leq \frac{2x-2}{3} < k+1 \\ -l-1 < \frac{-x+1}{6} \leq -l \end{cases}$ și adunăm $\Rightarrow 2001 < \frac{x-1}{2} < 2003 \Rightarrow 4003 < x < 4007$ (1). Apoi

sistemul $\begin{cases} k \leq \frac{2x-2}{3} < k+1 \\ l \leq \frac{x-1}{6} < l+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3k+2}{2} \leq x < \frac{3k+5}{2} \\ -6l-7 < -x \leq -6l-1 \end{cases} \Rightarrow \frac{3x+2}{2} - 6l - 7 < 0 < \frac{3k+5}{2} - 6l - 1 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} k - 4l < 4 \\ k - 4l > -1 \Rightarrow k - 4l \in (-1, 4) \cap \mathbf{Z} = \{0, 1, 2, 3\} \\ k, l \in \mathbf{Z} \end{cases}$

Caz 1) $\begin{cases} k - 4l = 0 \\ k - l = 2002 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3l = 2002 \text{ fals.} \\ l \in \mathbf{Z} \end{cases}$

$$\text{Caz 2)} \begin{cases} k - 4l = 1 \\ k - l = 2002 \\ k, l \in Z \end{cases} \Rightarrow 3l = 2001 \Rightarrow \begin{cases} l = 667 \\ k = 2669 \end{cases} . \text{ Apoi } \begin{cases} \left[\frac{2x-2}{3} \right] = 4l + 1 \\ \left[\frac{x-1}{6} \right] = l \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4l + 1 \leq \frac{2x-2}{3} < 4l + 2 \\ l \leq \frac{x-1}{6} < l + 1 \end{cases} \text{ și adunând } \Rightarrow 5l + 1 \leq \frac{5x-5}{6} < 6l + 3 \text{ cu } l = 667 \Rightarrow$$

$$\frac{20021}{5} \leq x < \frac{20033}{5} \Rightarrow x \in [2004,2 ; 4006,6) \quad (2). \text{ Din (1) și (2)} \Rightarrow x \in [2004,2; 4006,6);$$

$$\text{Caz 3)} \begin{cases} k - 4l = 2 \\ k - l = 2002 \\ k, l \in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3l = 2000 \\ l \in Z \end{cases}, \text{ fals. Caz 4)} \begin{cases} k - 4l = 3 \\ k - l = 2002 \\ k, l \in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3l = 1999 \\ l \in Z \end{cases}, \text{ fals.}$$

În concluzie, soluția ecuației, este orice x din intervalul $[2004,6 ; 4006,6)$

OBSERVAȚIE Acest exercițiu dovedește că, atunci când nu se verifică o identitate HERMITE, rezolvarea este destul de laborioasă, și cu destule dificultăți. Problema nu a fost rezolvată integral de nici un concurent !

VARIANTE ATIPICE DE RAȚIONAMENT INDUCTIV

Prof. Irina Anghelescu

Grup Școlar Industrial "Grigore Cerchez", București

Pornind de la cele două principii ale inducției matematice, se obțin două variante (clasice) ale metodei inducției matematice.

În cele ce urmează, vom nota cu P un predicat peste \mathbf{N} .

VARIANTA 1:

Pentru a demonstra că $P(n)$ este adevărată $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0$ se demonstrează că $P(n_0)$ este adevărată și că implicația $P(k) \rightarrow P(k+1)$ este adevărată $\forall k \geq n_0$.

VARIANTA 2:

Pentru a demonstra că $P(n)$ este adevărată $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0$ se demonstrează că $P(n_0)$ este adevărată și că implicația $(P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \dots \wedge P(k)) \rightarrow P(k+1)$ este adevărată $\forall k \geq n_0$.

Vom aplica în câteva exemple alte două variante ale raționamentului inductiv.

VARIANTA 3:

Dacă $p, n_0 \in \mathbf{N}, p \geq 1$ astfel încât $P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n_0+p-1)$ sunt adevărate și implicația $P(k) \rightarrow P(k+p)$ este adevărată $\forall k \geq n_0$, atunci $P(n)$ este adevărată $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0$.

APLICAȚII:

1. Arătați că un pătrat poate fi împărțit în n pătrate mai mici cu suprafețe disjuncte, unde n este un număr natural mai mare sau egal cu 6.

Demonstrație:

Notăm cu $P(n)$ propoziția de demonstrat. Arătăm că $P(6), P(7), P(8)$ sunt adevărate.

1	2	3
4	6	
5		

Descompunerea în 6
pătrate
P(6) adevărată

1	2	5
3	4	7
6		

Descompunerea în 7 pătrate
P(7) adevărată

1	2	3	4
5	8		
6			
7			

Descompunerea în 8 pătrate
P(8) adevărată

Demonstrăm că $P(k) \rightarrow P(k+3), \forall k \geq 6$. Vom modifica unul dintre cele k pătrate, celelalte $k-1$ rămânând neschimbate. Pătratul ales se împarte în patru pătrate congruente. Se obțin astfel 4 pătrate, care împreună cu celelalte $k-1$ formează $k+3$ pătrate. Obținem că $P(k+3)$ este adevărată. Cele două condiții (verificare și demonstrarea implicației) sunt îndeplinite, deci $P(n)$ este adevărată $\forall n \geq 6$.

2. Teorema Erdős-Suranny

Să se arate că pentru orice număr întreg există un număr natural nenul m și o alegere a semnelor astfel încât

$$n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \dots \pm m^2.$$

Demonstrație: Este suficient să arătăm cerința pentru n număr natural. Notăm cu $P(n)$:
”există un număr natural m astfel încât n să fie sumă algebrică de $1^2, 2^2, 3^2, \dots, m^2$ ”

Verificăm că $P(0), P(1), P(2), P(3)$ sunt adevărate și arătăm că $P(k) \rightarrow P(k+4), \forall k \in \mathbf{N}$.

$$P(0): 0 = 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2 \text{ (A)}, P(1): 1 = 1^2 \text{ (A)}, P(2): 2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 \text{ (A)}$$

$$P(3): 3 = -1^2 + 2^2 \text{ (A)}$$

Presupunem că $P(k)$ este adevărată, deci există un număr natural m astfel încât $k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \dots \pm m^2$. Prin calcul direct se arată că $4 = (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2$. Deducem

$$k+4 = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \dots \pm m^2 + (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2,$$

deci pentru $k+4$ am găsit numărul $m+4$ ce îndeplinește condițiile cerute. Am arătat astfel că $P(m+4)$ este adevărată și putem concluziona că $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural.

VARIANTA 4 (inducție „de sus în jos”):

Dacă există un șir nemărginit de numere naturale $(k_m)_m$ astfel încât $P(k_m)$ să fie adevărată $\forall m \in \mathbf{N}$ și dacă $P(k) \rightarrow P(k-1), \forall k \geq 1$, atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural.

APLICAȚIE: Inegalitatea mediilor

Să se arate că oricare ar fi n numere strict pozitive $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, n \geq 2$ are loc inegalitatea $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

Demonstrație:

Notăm cu $P(n)$ propoziția de demonstrat. Alegem șirul $k_m = 2^m$, șir de numere naturale nemărginit

Demonstrăm prin inducție după m (varianta 1) că $P(2^m)$ este adevărată, $\forall m \geq 1$.

Se demonstrează ușor că $\sqrt[2]{a_1 \cdot a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}$, $\forall a_1, a_2 > 0$. Deci $P(2^1)$ este adevărată.

Vom arăta că $P(2^k) \rightarrow P(2^{k+1})$. Fie 2^{k+1} numere strict pozitive: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2^{k+1}}$.

Avem că:

$$\begin{aligned} \sqrt[2^{k+1}]{a_1 a_2 \dots a_{2^k} \dots a_{2^k+1}} &= \sqrt[2^k]{\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \dots a_{2^k}} \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \dots a_{2^k+1}}} \stackrel{P(2^k)}{\leq} \\ &\leq \frac{\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \dots a_{2^k}} + \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \dots a_{2^k+1}}}{2} \leq \frac{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2^k}}{2^k} + \frac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \dots + a_{2^k+1}}{2^k}}{2} = \\ &= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2^k+1}}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

Concluzionăm că $P(2^{k+1})$ este adevărată, deci $P(2^m)$ este adevărată, $\forall m \geq 1$.

Demonstrăm acum că $P(k) \rightarrow P(k-1)$, $\forall k \geq 3$.

Din $P(k)$ adevărată deducem că oricum am alege k numere reale strict pozitive $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$, este adevărată inegalitatea $\sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k}$. Alegem

$$\begin{aligned} a_k &= (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{k-1})^{\frac{1}{k-1}}. \text{Obținem că } \sqrt[k]{(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{k-1})(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{k-1})^{\frac{1}{k-1}}} \leq \\ &\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{k-1})^{\frac{1}{k-1}}}{k} \Leftrightarrow \sqrt[k]{(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{k-1})^{\frac{k}{k-1}}} \leq \\ &\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{k-1})^{\frac{1}{k-1}}}{k} \Leftrightarrow (k-1) \sqrt[k-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{k-1}} \leq \\ &\leq a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}. \text{Așadar } \sqrt[k-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{k-1}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}}{(k-1)} \text{ și } P(k-1) \text{ este} \end{aligned}$$

adevărată. Deducem că $P(n)$ este adevărată $\forall n \geq 2$.

NOTE MATEMATICE

Generalizarea teoremei catetei și înălțimii

Prof. Marius Burtea

Liceul Pedagogic „Mircea Scarlat” Alexandria

În nota de față ne propunem a da o relație din care, prin particularizări, să se deducă teorema catetei și teorema înălțimii într-un triunghi dreptunghic.

Vom demonstra următorul rezultat:

Teoremă

Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și AD și BE înălțimi ale acestuia, $E \in AC$, $D \in BD$. Atunci are loc relația:

$$BD \cdot DC + AE \cdot AC = AD^2 \quad (1)$$

Demonstrație

Fie ABC ascuțitunghic. Atunci punctele D și E aparțin segmentelor [BC], respectiv [AC]. Triunghiurile BEC și ADC sunt asemenea fiind dreptunghice și având unghiul \hat{C} comun. Din asemănarea acestor triunghiuri se obține egalitatea:

$$\frac{EC}{DC} = \frac{BC}{AC}$$

din care rezultă că $EC \cdot AC = BC \cdot DC$. Așadar

$$EC \cdot AC = (BD + DC) \cdot DC \text{ sau}$$

$$(AC - AE) \cdot AC = BD \cdot DC + DC^2 \text{ sau}$$

$$AC^2 - DC^2 = AE \cdot AC + BD \cdot DC$$

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul

dreptunghic ADC se obține că $AD^2 = AE \cdot AC + BD \cdot DC$, adică relația cerută.

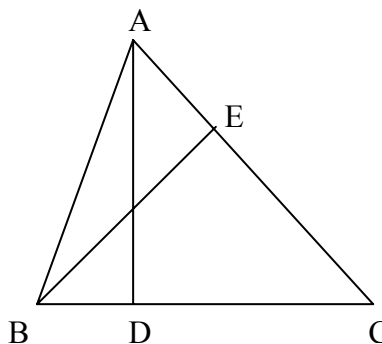


Figura 1

Cazuri particulare.

-Pentru $A=E$ unghiul \hat{A} este unghi drept, iar din relația (1) rezultă că $BD \cdot DC = AD^2$, adică teorema înălțimii.

-Pentru $B=D$ unghiul \hat{B} este unghi drept, iar relația (1) devine $AE \cdot AC = AD^2 = AB^2$, adică teorema catetei

Temă de studiu

Cercetați ce devine relația (1) dacă triunghiul ABC este obtuzunghic. Se mai obțin în particular teoremele catetei și înălțimii ?

Asupra unei probleme pregătitoare pentru O.I.M

Prof. **Mihai Ionescu**,
Inspector școlar de specialitate, ISJ Teleorman

În Gazeta Matematică a apărut la rubrica "Probleme pregătitoare pentru O.I.M" următoarea problemă:

"Dacă n este un număr natural impar ($n > 1$) și $p = 4n + 1$ este număr prim, atunci $4^n + 1$ este divizibil cu $5p$."

Problema admite extinderi la o formă mai generală. Câteva abordări în acest sens se pot face cu ajutorul claselor de resturi.

Soluția problemei:

Deoarece n este impar există k număr natural, astfel încât $n = 2k+1$. Se obține că $4^n + 1 = 4^{2k+1} + 1 = (4+1)(4^{2k} - 4^{2k-1} + \dots + 4 - 1)$ deci numărul $4^n + 1$ este divizibil cu 5.

Mai arătăm că $4^n + 1$ este divizibil cu p , adică $4^{2k+1} + 1 \div 8k+5$ sau $2^{4k+2} + 1 \div 8k+5$

În corpul \mathbb{Z}_{8k+5} , cu $8k+5$ număr prim, considerăm următoarele identități:

$$\begin{aligned} \bar{2} \cdot \bar{1} &= \bar{2}, \\ \bar{2} \cdot \bar{2} &= \bar{4} \dots\dots\dots \\ \bar{2} \cdot \overline{(2k+1)} &= \overline{4k+2} \\ \bar{2} \cdot \overline{(2k+2)} &= \overline{(4k+4)} = -\overline{(4k+1)} \\ \bar{2} \cdot \overline{(2k+3)} &= \overline{(4k+6)} = -\overline{(4k-1)} \\ \bar{2} \cdot \overline{(2k+4)} &= -\overline{(4k-3)} \dots\dots\dots \\ \bar{2} \cdot \overline{(4k+2)} &= -\bar{1} \end{aligned}$$

Înmulțind aceste egalități va rezulta:

$$\begin{aligned} (\bar{2})^{4k+2} (\bar{1} \cdot \bar{2} \cdot \bar{3} \dots\dots\dots \overline{4k+2}) &= \\ = (\bar{2} \cdot \bar{4} \dots\dots \overline{4k+2}) (-\bar{1})^{2k+1} (\bar{1} \cdot \bar{3} \dots\dots \overline{4k+1}) &= \\ = (-\bar{1})^{2k+1} (\bar{1} \cdot \bar{2} \cdot \bar{3} \dots\dots \overline{4k+2}) \end{aligned}$$

Deoarece $8k+5$ este prim, în corpul \mathbf{Z}_{8k+5} avem că $\bar{1} \cdot \bar{2} \cdot \bar{3} \dots\dots \overline{4k+2} \neq \bar{0}$. Deoarece numărul $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (4k+2)$ nu se poate divide cu numărul prim $8k+5$, prin înmulțirea egalității cu $(\bar{1} \cdot \bar{2} \cdot \bar{3} \dots\dots \overline{4k+2})^{-1}$ rezultă că

$$(\bar{2})^{4k+2} = (-\bar{1})^{2k+1}, \text{ adică } (\bar{2})^{4k+2} + \bar{1} = \bar{0}, \text{ deci } 2^{4k+2} + 1 : 8k+5, \text{ ceea ce încheie}$$

demonstrația.

$$\begin{aligned} \bar{2} \cdot \bar{1} &= \bar{2} \\ \bar{2} \cdot \bar{2} &= \bar{4} \dots\dots\dots \\ \bar{2} \cdot \overline{k-1} &= \overline{2k-2} \\ \bar{2} \cdot \overline{k} &= \overline{2k} \\ \bar{2} \cdot \overline{k+1} &= \overline{2k+2} = -\overline{(2k-1)} \\ \bar{2} \cdot \overline{k+2} &= \overline{2k+4} = -\overline{(2k-3)} \dots\dots\dots \\ \bar{2} \cdot \overline{k+k} &= \overline{4k} = -\bar{1} \end{aligned}$$

Metoda prezentata se poate aplica pentru numere prime de mai multe forme, de exemplu daca $n=4k+1$ este numar prim: putem scrie în \mathbf{Z}_{4k+1}

Înmulțind relațiile rezultă că:

$$\begin{aligned} \bar{2}^{2k} (\bar{1} \cdot \bar{2} \cdot \dots\dots \overline{2k}) &= (\bar{2} \cdot \bar{4} \dots\dots \overline{2k}) (-\bar{1})^k (\bar{1} \cdot \bar{3} \dots\dots \overline{(2k-1)}) = \\ = (-\bar{1})^k (\bar{1} \cdot \bar{2} \cdot \dots\dots \overline{2k}) \end{aligned}$$

Deoarece $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2k$ nu poate fi divizibil cu un număr prim $4k+1$ rezultă că $(\bar{1} \cdot \bar{2} \cdot \dots\dots \overline{2k}) \neq \bar{0}$ și este astfel

$$\text{inversabil în } \mathbf{Z}_{4k+1}. \text{ Așadar rămâne că } \bar{2}^{2k} = (-\bar{1})^k, \text{ adică } 2^{2k} + (-1)^{k+1} : 4k+1$$

Pentru numere prime de forma 2^n+1 (de exemplu 17), $n \in \mathbf{N}^*$, în \mathbf{Z}_{2^n+1} avem egalitățile:

$$\begin{aligned} \bar{2} \cdot \bar{1} &= \bar{2} \\ \bar{2} \cdot \bar{2} &= \bar{4} \\ \dots\dots\dots \\ \bar{2} \cdot (\bar{2})^{n-2} &= (\bar{2})^{n-1} \\ \bar{2} \cdot ((\bar{2})^{n-2} + \bar{1}) &= (\bar{2})^{n-1} + \bar{2} = -((\bar{2})^{n-1} - \bar{1}) \\ \bar{2} \cdot ((\bar{2})^{n-2} + \bar{2}) &= (\bar{2})^{n-1} + \bar{4} = -((\bar{2})^{n-1} - \bar{3}) \\ \dots\dots\dots \\ \bar{2} \cdot (\bar{2})^{n-1} &= (\bar{2})^n = -\bar{1} \end{aligned}$$

Inmulțind relațiile rezulta

$$\hat{2}^{2^{n-1}} = (\bar{1} \cdot \bar{2} \cdot \dots\dots \hat{2}^{n-1}) = (-\bar{1})^{2^{n-2}} (\bar{1} \cdot \bar{2} \cdot \dots\dots (\bar{2})^{n-1})$$

deci $(\bar{2})^{2^{n-1}} = \bar{1}$, adică $2^{2^{n-1}} - 1 : 2^n + 1$, pentru 2^n+1 număr prim.

Procedeeul se poate aplica pentru numere prime de forme diverse care permit simplificarea care apare necesara în finalul raționamentului.