

## În legătură cu o teoremă de medie a lui Dimitrie Pompeiu

*Prof. Nicolae Loghin,  
Colegiul Național „Al. D. Ghica” Alexandria*

Următorul enunț este cunoscut sub numele de **Teorema de medie a lui Pompeiu**:

### Teorema 1

Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a, b \in (0, +\infty)$ , astfel încât

- a).  $f$  este continuă pe  $[a, b]$  ;
- b).  $f$  este derivabilă pe  $(a, b)$  ;

Atunci există  $c \in (a, b)$  cu proprietatea că  $\frac{1}{a-b} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(c) - cf'(c)$ , (\*)

În nota de față vom da demonstrația acestei teoreme și unele observații asupra sa.

### Demonstrație

Funcțiile  $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ,  $h(x) = \frac{1}{x}$  sunt funcții derivabile pe intervalul

$(a, b)$ . aplicând teorema lui Cauchy funcțiilor  $g$  și  $h$ , rezultă că există  $c \in (a, b)$ , astfel

încât  $\frac{g(b) - g(a)}{h(b) - h(a)} = \frac{g'(c)}{h'(c)}$ . Având în vedere că  $\frac{g(b) - g(a)}{h(b) - h(a)} = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}$ , iar

$\frac{g'(c)}{h'(c)} = f(c) - cf'(c)$  se obține egalitatea  $\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(c) - cf'(c)$ , relație echivalentă

cu relația cerută.

Teorema admite și o **interpretare geometrică**.

Astfel, fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă,  $a, b \in (0, +\infty)$  și punctele  $A(a, f(a))$ ,

$B(b, f(b))$ . Dreapta  $AB$  intersectează axa  $Oy$  în punctul  $P(0, y)$ .

Impunând condiția ca secanta  $AB$  și tangenta în punctul  $C(c, f(c))$  la graficul funcției  $f$ , să fie concurente în punctul  $P(0, y) \in Oy$ , se obține relația (\*).

Într-adevăr, ecuația dreptei  $AB$  este  $y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$ . Din

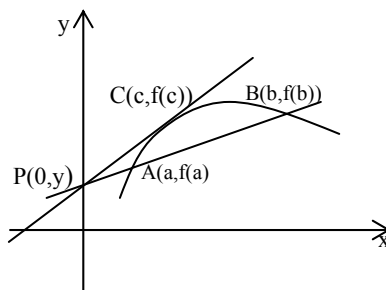
condiția ca această dreaptă să treacă prin punctul  $P$  se obține că

$y = f(a) - a \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}$ , (1). Ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în

punctual  $C$  este  $y - f(c) = f'(c) \cdot (x - c)$ . Din condiția ca această tangentă să conțină

punctul  $P$  rezultă că  $y = f(c) - c \cdot f'(c)$ , (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă egalitatea (\*).

Schimbând datele problemei rezultă o altă teoremă de medie.



## Teorema 2

Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a, b \in (0, +\infty)$ , astfel încât

- $f$  este continuă pe  $[a, b]$ ;
- $f$  este derivabilă pe  $(a, b)$ , cu derivata nenulă pe  $[a, b]$ ;
- $f(b) \neq f(a)$ .

Atunci există  $c \in (a, b)$  cu proprietatea că  $\frac{af(b) - bf(a)}{b - a} = c - \frac{f(c)}{f'(c)}$ , (\*\*)

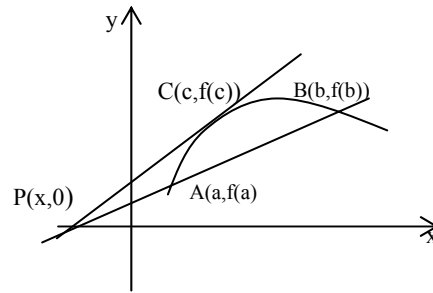
### Demonstrație

Se aplică teorema lui Cauchy funcțiilor  $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ ,  $h(x) = \frac{x}{f(x)}$ .

Si această teoremă admite o interpretare geometrică.

Fie punctele  $A(a, f(a))$ ,  $B(b, f(b))$ . Dreapta  $AB$  intersectează axa  $Ox$  în punctul  $P(x, 0) \in Ox$ .

Impunând condiția ca secanta  $AB$  și tangenta în punctul  $C(c, f(c))$  la graficul funcției  $f$ , să fie concurente în punctul  $P(x, 0) \in G_f$ , se obține relația (\*\*).



## Operații cu funcții având proprietatea lui Darboux

Prof. Luminița Cozma

Liceul Pedagogic „Gh. Asachi” , Piatra Neamț

Este interesant de văzut dacă, operând cu funcții ce au proprietatea lui Darboux, se păstrează această proprietate. Rezultatele următoare ne vor lămurii cu privire la acest aspect. Notăm cu  $D(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ are proprietatea lui Darboux}\}$  mulțimea funcțiilor

### Propoziția 1

Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție și  $a \in \mathbb{R}$ . Dacă  $f \in D(I)$  atunci

- $a + f \in D(I)$ ;
- $a \cdot f \in D(I)$ .

**Observație:** Suma a două funcții cu proprietatea lui Darboux nu are, în general, proprietatea lui Darboux (când sumăm două funcții cu proprietatea lui Darboux putem obține orice fel de funcție).

**Exemplu:** Fie  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$  și  $g(x) = \begin{cases} -\cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ . Se obține că

$f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(f + g)(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ . Observăm că  $f$  și  $g$  au proprietatea lui Darboux

pe  $\mathbb{R}$ , iar funcția sumă  $f + g$  nu are proprietatea lui Darboux pe  $\mathbb{R}$ .

**Teoremă** ( W. Sierpinski, 1956)

Pentru orice funcție  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , există funcțiile  $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $f_1, f_2 \in D(\mathbb{R})$ , astfel încât  $f = f_1 + f_2$

**Propoziția 2**

Dacă  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^*$  este o funcție cu proprietatea lui Darboux pe  $I$  atunci  $\frac{1}{f}$  are  
 proprietatea lui Darboux pe  $I$ .

**Demonstrație**

Presupunem fără a reduce generalitatea că  $f(I) \subset \mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$ . Fie  $J \subset I$  un  
 interval. Atunci  $\left(\frac{1}{f}\right)(J) = \left\{\frac{1}{f(x)}, x \in J\right\} = \left\{\frac{1}{y}, y \in f(J)\right\} = \left(\frac{1}{d}, \frac{1}{c}\right)$ . Așadar funcția  $\frac{1}{f}$   
 duce intervalul  $J$  într-un interval, deci are proprietatea lui Darboux.

**Observație**

Produsul a două funcții cu proprietatea lui Darboux nu are, în general, proprietatea  
 lui Darboux.

**Exemplu** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = \begin{cases} 7 + \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 6, & x = 0 \end{cases}$ ,  $f \in D(\mathbb{R})$ . Cum  $f \neq 0$ ,

conform propoziției precedente,  $\frac{1}{f} \in D(\mathbb{R})$ , adică  $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \begin{cases} \frac{1}{7 + \sin \frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{6}, & x = 0 \end{cases} \in D(\mathbb{R})$ .

Notăm  $g = \frac{1}{f}$  și fie  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \begin{cases} 7 + \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 7, & x = 0 \end{cases}$ ,  $h \in D(\mathbb{R})$ . Rezultă

că  $(hg)(x) = h(x)g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ \frac{7}{6}, & x = 0 \end{cases} \notin D(\mathbb{R})$ .

**Observație**

Dacă  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g \in D(I)$ ,  $g(x) \neq 0$ ,  $(\forall)x \in I$ , atunci nu rezultă, în general,  
 că  $\frac{f}{g}$  are proprietatea lui Darboux pe  $I$ .

**Exemplu :**

Fie funcțiile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 3 + \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $g(x) = \begin{cases} 3 + \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

$f, g \in D(\mathbb{R})$  și  $g(x) \neq 0$ ,  $\frac{f}{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ \frac{3}{2}, & x = 0 \end{cases} \notin D(\mathbb{R})$ .

În continuare vom considera o condiție mai tare decât  $f \in D(I)$  și anume  $f \in P(I)$  unde  $P(I)$  reprezintă mulțimea funcțiilor care admit primitive pe intervalul  $I$ .

**Propoziția 3**

Dacă  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g \in P(I)$  și  $g(I) \subset \mathbb{R}^*$ , atunci  $\frac{f}{g} \in D(I)$ .

**Demonstrație**

Vom folosi definiția proprietății lui Darboux. Fie  $x_1, x_2 \in I$  cu  $x_1 < x_2$  și fie un  $\lambda$  oarecare cuprins între  $\frac{f(x_1)}{g(x_1)}$  și  $\frac{f(x_2)}{g(x_2)}$ . Cum  $g(I) \subset \mathbb{R}^*$  avem că  $g(I) \subset (0, +\infty)$  sau

$g(I) \subset (-\infty, 0)$ . Presupunem  $g(I) \subset (0, +\infty)$  și  $\frac{f(x_1)}{g(x_1)} < \lambda < \frac{f(x_2)}{g(x_2)}$ . Avem că  $f(x_1) -$

$\lambda \cdot g(x_1) < 0 < f(x_2) - \lambda \cdot g(x_2)$ . Considerăm funcția  $h = f - \lambda \cdot g$ . Cum  $P(I)$  este spațiu vectorial, rezultă că  $h \in P(I) \Rightarrow h \in D(I)$ .

Deoarece  $h(x_1) < 0 < h(x_2)$  rezultă că  $(\exists)c \in (x_1, x_2)$  astfel încât  $h(c) = 0$ , deci

$f(c) - \lambda \cdot g(c) = 0$ . Dar  $g(c) \neq 0$  și rezultă că  $\frac{f(c)}{g(c)} = \lambda$ . În concluzie funcția  $\frac{f}{g} \in D(I)$

**Propoziție**

Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in D(I)$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g \in D(J)$  și  $f(I) \subset J$ . Atunci funcția  $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , are proprietatea lui Darboux pe intervalul  $I$ .

**Propoziție**

Fie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție bijectivă. Atunci  $f \in D(I)$  dacă și numai dacă  $f^{-1} \in D(I)$ . Dacă  $B = \{f : I \rightarrow I \mid f \text{ bijectivă și } f \in D(I)\}$ , atunci  $(B, \circ)$  are o structură de grup.

**Bibliografie**

1. Gheorghiu N., Precupanu T. - *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979
2. Nicolescu M., Dinculeanu N., Marcus S. - *Analiză matematică vol. I*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1966
3. Sirețchi Gh. - *Calcul diferențial și integral vol.1-2*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985
4. \*\*\* - *Gazeta matematică*